Herten

Joris Borgdorff

23 februari 2004

1 Inleiding

Op een groot landgoed leeft een populatie herten. Het aantal herten aan het einde van het n-de jaar geven we aan met N_n. Het blijkt dat de grootte van de hertenpopulatie in een bepaald jaar afhangt van de populatie in het voorgaande jaar volgens een recursie van de vorm

$$N_{n+1} = aN_n(1 - N_n/1000),$$

waarin a een nader aan te geven constante is. Als deze recursie in een zeker jaar een negatief aantal herten als resultaat oplevert, d.w.z. als er een n is waarvoor N_n 0, dan zeggen we dat de populatie is uitgestorven, en stellen we $N_k = 0$ voor alle $k \geq n$. We normeren de recursie door de nieuwe variabele $x_n = N_n/1000$ in te voeren. Als voor een gegeven n geldt dat $x_n = 0{,}14$, zijn er in het jaar n dus 140 herten. Het is eenvoudig in te zien dat de getallen x_n voldoen aan de recursie

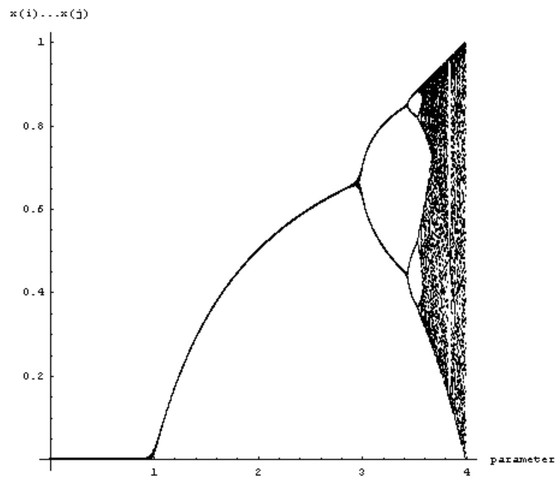
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \qquad (1)$$

2 Invloed van de groeifactor

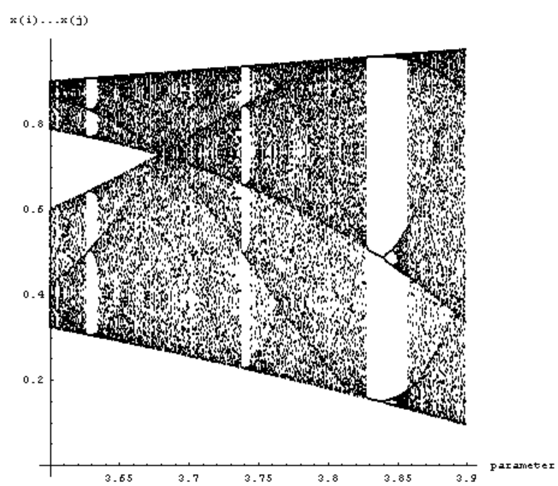
2.1 Stabiele recursie

We bekijken nu eerst de recursie (1) zelf, zonder daarbij aan herten- of zelfs maar dierpopulaties te denken.

Figuur 1 laat zien dat er voor $0 < a < 3$ een stabiel evenwicht is, wat te zien is doordat de waarden van x_{50} tot x_{100} nauwelijks verschillen op dit gebied en dus in een evenwicht zijn. Als je kijkt naar $3 \leq a \leq 3,5$ dan zie je dat er bij een willekeurige a steeds twee waarden zijn die door x_{50} tot x_{100} worden aangenomen: een stabiele 2-baan. Als je dan inzoomt zie je dat de grafiek van chaos in figuur 2 ook even overgaat in een stabiele 3-baan, bij $a = 3,83$ namelijk.



Figuur 1: De grafiek van (1) waarbij a parameter is die loopt van 0 tot 4



Figuur 2: Ingezoomd op de chaos

2.2 Concreet voorbeeld

Uit onderzoek is gebleken dat voor onze hertenpopulatie geldt dat $a = \frac{3}{2}$ waardoor je

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n(1 - x_n) \tag{2}$$

krijgt. Dat betekent dat het een stabiele populatie is, hebben we net gezien. Dit kan je uitwerken tot

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x(1-x) &= x \Rightarrow \\ \frac{1}{2}x(1-3x) &= 0 \Rightarrow \\ x = 0 &\cup x = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dat betekent dat 0 een evenwichtspunt is van (2) (wat logisch is, met 0 herten groeit of krimpt de populatie niet) en $\frac{1}{3}$ ook.

$$f'(x) = \frac{3}{2} - 3x \tag{4}$$

$$|f'(0)| = |\frac{3}{2}| > 1 \tag{5}$$

$$|f'(\frac{1}{3})| = |\frac{3}{2} - 1| < 1 \tag{6}$$

Uit (3), (5) en (6) kun je concluderen dat $x = \frac{1}{3}$ het enige stabiele evenwichtspunt is en er ongeveer 333 herten zijn als de situatie stabiliseert.

3 De grootte van een populatie reguleren

3.1 De invloed van jagen wiskundig geformuleerd

Ons landgoed is niet zo vreedzaam als wij aanvankelijk dachten, de eigenaar en zijn vrienden jagen er namelijk op herten, deels uit populatiebeheer, deels uit morbide vermaak. De eigenaar besluit dat er jaarlijks een vast aantal herten, zeg J, kunnen worden afgeschoten. Dit betekent dat de populatie zich nu ontwikkelt volgens de formule

$$N_{n+1} = \frac{3}{2}N_n(1 - N_n/1000) - J.$$

Hier nemen we aan dat de factor $\frac{3}{2}$ niet is afgenomen door de grotere stress op de dieren. Er geldt nog steeds dat de populatie uitsterft in jaar n als dit oplevert dat $x_n \leq 0$.

Dit kan je normeren door $x_n = N_n/1000$ te nemen waardoor

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n(1 - x_n) - b$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}N_n/1000(1-N_n/1000) - J/1000 \\
&= \frac{\frac{3}{2}N_n(1-N_n/1000) - J}{1000} \\
&= N_{n+1}/1000 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

waarin $b = J/1000$.

3.2 Het aantal herten constant houden

De eigenaar van het landgoed besluit dat een constant aantal herten van 200 op zijn landgoed wenselijk zou zijn. Dit kan bereikt worden door genoeg herten te jagen, dus door b in (7) goed te kiezen:

$$
\begin{aligned}
0,2 &= \frac{3}{2}0,2(1-0,2) - b \Rightarrow \\
b &= \frac{3}{2}0,16 - 0,2 = 0,04.
\end{aligned}
$$

$b = 0,04$ is dus het evenwichtspunt. Als het een stabiel evenwichtspunt is moet de absolute waarde van de afgeleide (4) minder dan 1 zijn.

$$|f'(0,2)| = |\frac{3}{2} - 0,6| < 1$$

Dit betekent dat het aantal van 200 stabiel is. Dit betekent dat hij een constant aantal van 200 herten op zijn landgoed kan houden, en daarvoor elk jaar 40 herten moet afschieten.

Maar stel hij wil 100 herten op zijn landgoed. Dan moet je b dus anders kiezen:

$$
\begin{aligned}
0,1 &= \frac{3}{2}0,1(1-0,1) - b \Rightarrow \\
b &= \frac{3}{2}0,09 - 0,1 = 0,035.
\end{aligned}
$$

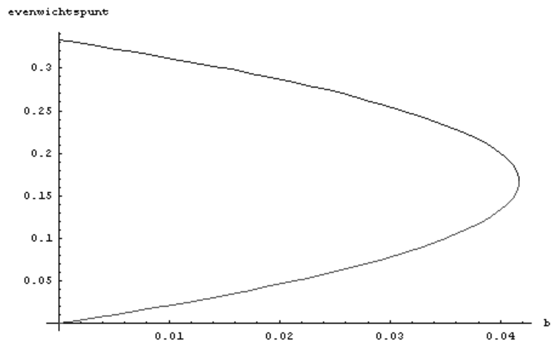
In dit geval moeten er dus jaarlijks 35 herten afgeschoten worden. Maar als je dit invult in de afgeleide krijg je

$$|f'(0,1)| = |\frac{3}{2} - 0,3| > 1,$$

wat betekent dat dit aantal niet stabiel is en hij dat aantal niet kan aanhouden.

3.3 Stabiliteit bij meer of minder afschieten

Hiermee kunnen we nu gaan kijken naar wat er gebeurt met de stabiliteit als je meer of minder herten afschiet want bij het varieren van b krijg je ook stabiliteit



Figuur 3: De grafiek van de evenwichtspunten, waarbij de rode grafiek van $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{1-24b}$ is.

en instabiliteit. We kunnen kijken naar de evenwichtspunten

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x^2 &+ \frac{1}{2}x - b = 0 \Rightarrow \\ x &= \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6b}}{-3} \\ &= \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{1-24b} \end{aligned}$$

Dit betekent dat er alleen een evenwichtspunt is als x reëel bestaat en dus als $b \leq \frac{1}{24}$. Als je dit invult in (4) krijg je

$$\begin{aligned} |f'(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{1-24b})| &= |\frac{3}{2} - 3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{1-24b}\right)| \\ &= |1 - \sqrt{1-24b}| \qquad (8) \\ |f'(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{1-24b})| &= |\frac{3}{2} - 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{1-24b}\right)| \\ &= |1 + \sqrt{1-24b}|. \qquad (9) \end{aligned}$$

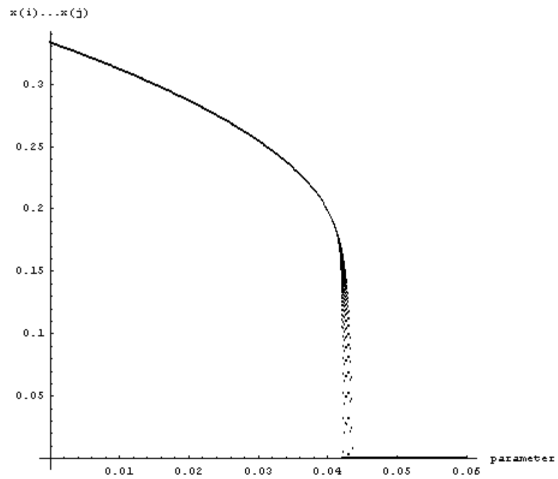
Dan is als $b < \frac{1}{24}$ (9) < 1, dus $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{1-24b}$ is een stabiel evenwichtspunt. In figuur 3 zie je de grafiek van de evenwichtspunten geplot. (4) is alleen minder dan 1 bij de blauwe grafiek.

4 Algemener beschouwd

4.1 Stabiliteit bij varieren van factor met afschieten

Waarden onder de nul hebben geen zin bij populaties dus vanaf nu nemen we deze formule aan:

$$x_{n+1} = max(ax_n(1-x_n) - b, 0). \qquad (10)$$

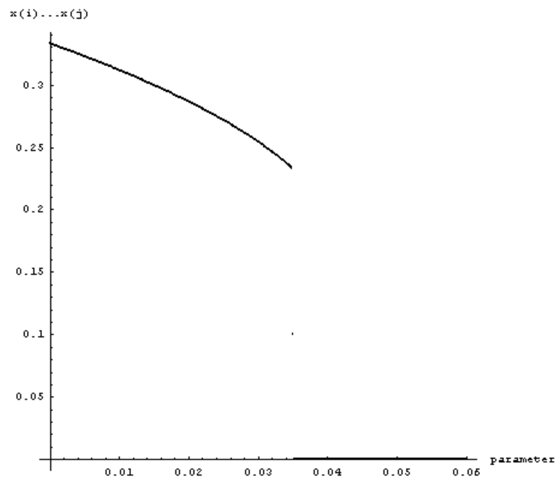


Figuur 4: De grafiek van (10) waarbij b de parameter is, $x_0 = 0,5$ en $a = \frac{3}{2}$

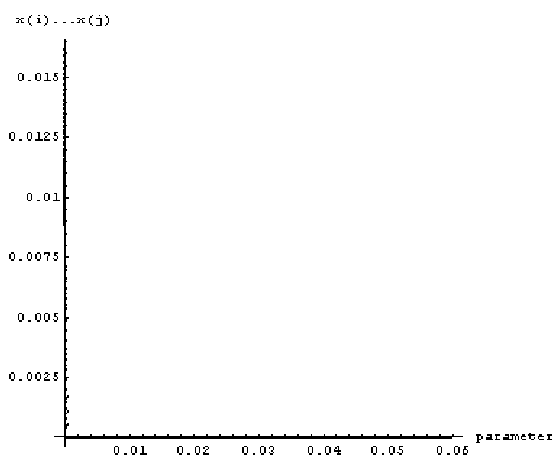
We kunnen nu ook weer kijken naar stabiliteit bij variatie van a en b. Als je b nu varieert bij bijvoorbeeld $a = \frac{3}{2}$ dan zie je dat de waarde van x_0 opeens een groter verschil gaat maken zoals je ziet in figuur 4 en figuur 5. Als je echter kijkt bij $a = \pi$ of $a = 3,8$ dan maakt het weer bijster weinig uit.

4.2 In een iteratiediagram

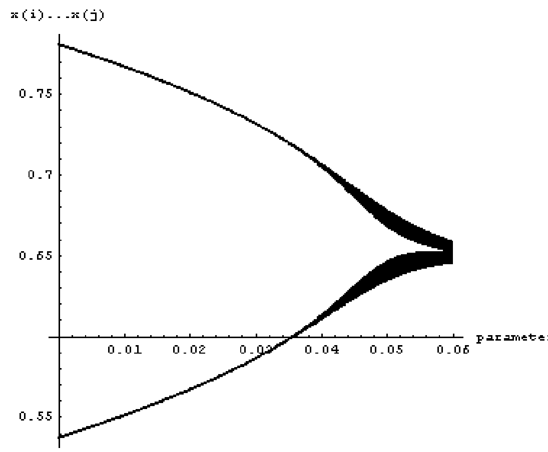
Nu kun je de zaak ook wat anders zien met een iteratiediagram. Dit weerspiegelt het model in een grafiek waarbij je telkens heen en weer springt tussen de $y = x$ as en de grafiek. Hiermee zie je in opeenvolgende stappen hoe groot de populatie wordt, waar de evenwichtspunten liggen en welke daarvan waarschijnlijk stabiel zijn. In figuur 9 zie je bij $x_0 = 0,7$, $a = \frac{3}{2}$ en $b = 0,03$ dat de populatie naar rond de 250 herten zal gaan. Als je echter neemt $b = 0,045$ zoals in figuur 10 dan raakt $y = x$ de grafiek niet en zal er geen stabiel evenwicht ontstaan.



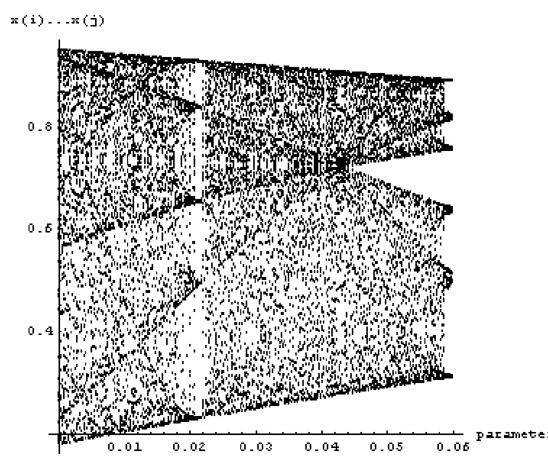
Figuur 5: Nu is $x_0 = 0,1$



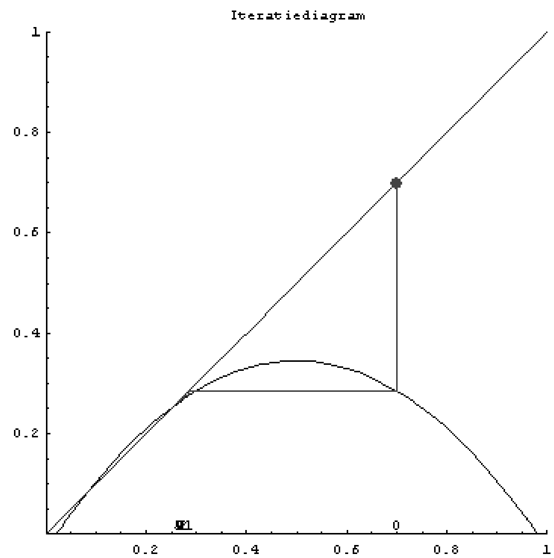
Figuur 6: De grafiek van (10) waarbij b de parameter is, $x_0 = 0,5$ en $a = 1$



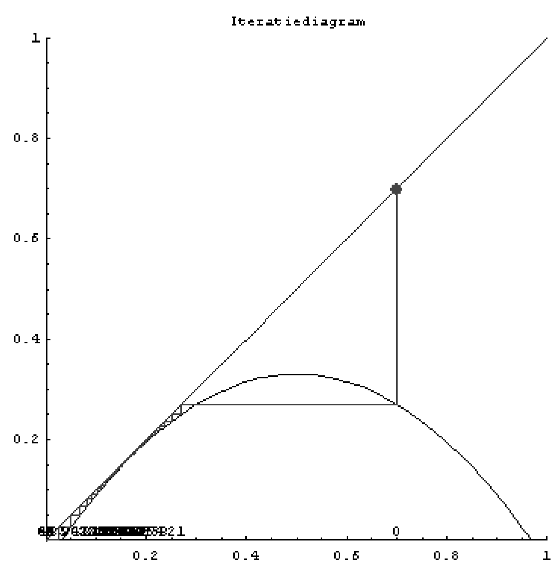
Figuur 7: Voor $a = \pi$



Figuur 8: Voor $a = 3,8$



Figuur 9: Gaat naar een stabiel punt



Figuur 10: Raakt de $y = x$ niet