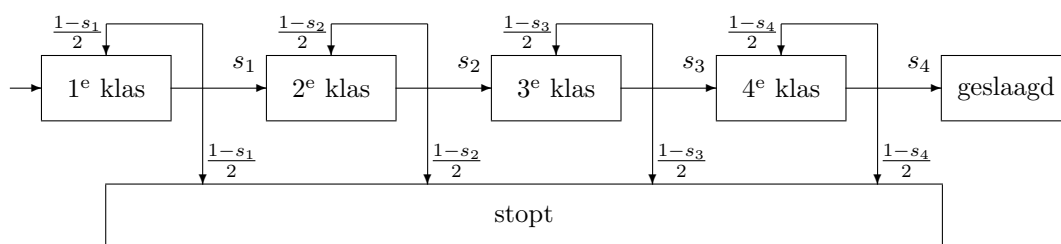


Modellen en Simulatie 2004, inleveropgave 2

Inleverdatum: 22 maart 2004 (15h15)

Studentenverloop in het hoger beroepsonderwijs

In onderstaand diagram is het verwachte studieverloop voor een student aan een vierjarige opleiding fysiotherapie weergegeven. De parameters s_i ($0 \leq s_i \leq 1$) geven de kans op voortzetting van de studie in het volgende studiejaar aan, $\frac{1-s_i}{2}$ de kans op het jaar overdoen of het staken van de studie.



Om de waarden van de s_i te bepalen, is het studieverloop van alle studenten fysiotherapie gedurende vijf jaar gevolgd. Het resultaat is

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{2}{3}, \quad s_3 = \frac{3}{4}, \quad s_4 = \frac{4}{5}.$$

Onderzoek heeft uitgewezen dat er jaarlijks behoefte is aan 100 nieuwe fysiotherapeuten. Er zijn echter jaarlijks meer dan 1000 mensen die deze studie willen gaan volgen. Om de markt niet te overspoelen, wordt er een studiestop ingesteld. Eén van de dingen die we willen weten is hoeveel studenten er maximaal kunnen worden toegelaten.

We geven twee modellen voor bovenstaand probleem, afhankelijk van het soort vragen dat we willen beantwoorden.

NB Bij enkele van de volgende is expliciet aangegeven dat gebruik gemaakt dient te worden van **Mathematica**. Waar dit niet het geval is, *mag Mathematica* wel gebruikt worden. Verwerk al je **Mathematica** code in je verslag.

Voor ons eerste model zij $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, $x_4(n)$ het aantal eerste, tweede, derde en vierde jaars studenten in jaar n , en $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n))^T$. Veronderstel dat er jaarlijks een instroom van I nieuwe eerste jaars studenten is.

1. Geef een recursie die $\vec{x}(n+1)$ uitdrukt in $\vec{x}(n)$.
2. Laat zien dat bovenstaande recursie een evenwichtoplossing heeft, en bepaal deze.
3. Bewijs dat iedere oplossing naar deze stationaire oplossing convergeert.
4. Hoeveel studenten kunnen er elk jaar toegelaten worden om uiteindelijk een uitstroom van 100 nieuwe fysiotherapeuten te garanderen?

5. Wat zijn de kansen dat een student de studie met een diploma afsluit, respectievelijk stopt zonder diploma?

Voor het tweede model vatten we bovenstaand systeem op als een Markovketen met zes toestanden, namelijk student in het eerste jaar, ..., student in het vierde jaar, geslaagd en gestopt zonder diploma.

6. Geef de overgangsmatrix P . Is deze irreducibel?
7. Bepaal met defektieve kansmatrices afgeleid van P de kansen dat een student zijn opleiding uiteindelijk met een diploma afsluit, respectievelijk stopt zonder diploma.
8. Gebruik **Mathematica** om te bepalen hoe lang heeft een student die zijn diploma haalt gemiddeld heeft gestudeerd.
9. Gebruik **Mathematica** om te bepalen hoe lang heeft een student die de studie voortijdig staakt gemiddeld heeft gestudeerd.
10. Per jaar kost een student fysiotherapie 10.000 euro. Wat zijn de gemiddelde totale kosten van deze opleiding per aankomende student? Wat zijn dus de gemiddelde kosten voor elke geslaagde fysiotherapeut?

In het kader van bezuinigingen wordt voorgesteld om een strenge selectie toe te passen in het eerste jaar: dit jaar mag niet meer overgedaan worden, d.w.z. iedereen die dit jaar niet meteen haalt, moet stoppen. Verder verandert er niets aan de opleiding, zodat de kans dat een student overgaat naar het volgende jaar onveranderd is.

11. Wat zijn nu de antwoorden op bovenstaande vragen? Is door deze bezuiniging een grotere efficiëntie bereikt, d.w.z. zijn de totale kosten afgenomen?

Het bestuur van de opleiding vreest, dat door de strenge selectie in het eerste jaar veel 'laatbloeiers' voor de opleiding verloren zullen gaan, en besluit de eis dat het eerste jaar in 1 keer gehaald moet worden niet in te voeren. In plaats daarvan overweegt men de regel in te voeren dat voortaan ieder jaar maximaal 1 keer mag worden overgedaan. Wie voor de tweede keer in hetzelfde jaar blijft zitten, moet stoppen.

12. Pas het model aan deze situatie aan, en beantwoord vraag 7 t/m 10 nogmaals. Wat is het effect van deze maatregel op de efficiëntie van de opleiding?

Ook de regel dat per klas slechts één keer blijven zitten toegestaan is, bevalt niet, en wordt niet ingevoerd.

De opleiding fysiotherapie heeft inmiddels wel een aantal andere ingrijpende veranderingen achter de rug, waardoor de waarden van de parameters s_i in het schema aan het begin van de opgave niet meer bekend zijn, als van hogerhand opdracht gegeven wordt het rendement van de opleiding te verhogen.

13. Beantwoord vraag 7 t/m 10 nogmaals, opnieuw gebruik makend van **Mathematica**, voor algemene waarden van de s_i .

Het bestuur van de opleiding besluit de slaagkans voor studenten te proberen te verhogen, door de kans op overgaan vanuit één bepaald jaar naar het volgende jaar te vergroten, door de studenten in dat ene jaar extra te begeleiden.

14. Op welk jaar kan men zich, bij gegeven (willekeurige) waarden $0 \leq s_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq 4$), het best richten? Welk effect heeft dit op de kans dat een student de opleiding uiteindelijk met een diploma verlaat? En op de gemiddelde tijd die een student die uiteindelijk zonder diploma de opleiding verlaat, studeert?
15. Kun je zelf (andere) manieren bedenken om de opleiding goedkoper te maken? Wat zijn de voor- en nadelen ervan?
16. Bewijs dat, gegeven een studieduur van vier jaar en een uitstroom van 100 geslaagden per jaar, de totale kosten minstens 4 miljoen zijn. In welke situatie wordt dit bereikt? Is dit wenselijk?